

2018-2019 учебный год


**КУБОК
ГАГАРИНА**
олимпиада школьников

МАТЕМАТИКА

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
8 класс
Максимальное количество баллов за задания:

Задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
Количество баллов	2	2	3	2	2	3	3	4	4	5	30

Все оценки должны быть целыми числами, дробные оценки не допускаются!

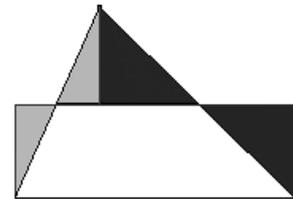
ОТВЕТЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ

1. 1 балл за правильный ответ + 1 балл за верное обоснование. Максимально 2 балла

В Если следить за чётностью разностей числа амёб каждого двух типов, то становится ясно, что амёбы типа В обязательно останутся.

2. 2 балла за правильный ответ. Максимально 2 балла

Например, провели среднюю линию треугольника, опустили на неё перпендикуляр из вершины, тем самым разбили треугольник на три части:



3. 1 балл за правильный ответ + до 2 баллов за верное обоснование. Максимально 3 балла

18, 45, 90 и 99

По условию сумма цифр числа x и числа $9x$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число x делится на 9. Двухзначные числа, кратные 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их, соответственно, на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа обладают требуемым свойством.

4. 1 балл за правильный ответ + 1 балл за верное обоснование. Максимально 2 балла

35 человек

количество «дружеских связей» в секции в 3 раза больше числа девочек и в два раза больше числа мальчиков. Значит, число мальчиков относится к числу девочек, как 3 : 2, а общее число учеников делится на 5. С другой стороны, в секции не меньше 31 и не больше 38 учеников. Следовательно, их 35.

5. 2 балла за правильный ответ. Максимально 2 балла

1023457896

6. 1 балл за правильный ответ + до 2 баллов за верное обоснование. Максимально 3 балла

220 способов

Выложим роботов в ряд. Для определения расклада наших роботов по четырём контейнерам разделим ряд тремя перегородками на четыре группы. Таким образом, число вариантов раскладки роботов по контейнерам равно числу способов расположения трёх перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 12 мест (между 13 роботами – 12 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно $12 \cdot 11 \cdot 10 / 3! = 220$

7. 1 балл за правильный ответ + до 2 баллов за верное обоснование. Максимально 3 балла

86875

Всего пятизначных чисел 90000, из них чисел, в которых все цифры нечётные, $5^5 = 3125$. Остаётся $90000 - 3125 = 86875$ чисел, содержащих хотя бы одну чётную цифру.

8. 1 балл за правильный ответ + до 3 баллов за верное обоснование. Максимально 4 балла

1200 верёвочек

Вначале верёвочек было $121 \cdot 10 + 120 \cdot 11 = 2530$, в конце их, как минимум, $11 \cdot 121 - 1 = 1330$. Таким образом, можно перерезать $2530 - 1330 = 1200$ верёвочек.

9. 4 балла за правильный ответ (за неполный ответ ставить 1 балл). Максимально 4 балла

(5, 2), (0, -3), (3, 3), (-1, -1)

Запишем уравнение в виде $(x - 1)(y - 1) = 4$. Осталось перебрать возможные разложения числа 4 в произведение двух целых множителей

10. До 5 баллов за правильный ответ с обоснованием. Максимально 5 баллов

(1 г; 2 г), (1 г; 3 г), (2017 г; 2019 г) и (2018 г; 2019 г)

а) Объясним, почему Стрелка не сумеет уравновесить указанные наборы.

В парах гирь (1 г; 2 г) и (1 г; 3 г) сумма масс меньше, чем сумма масс любых двух гирь оставшегося набора, а в парах (2017 г; 2019 г) и (2018 г; 2019 г), наоборот, сумма масс больше, чем сумма масс любых двух гирь оставшегося набора.

б) Покажем, как Стрелка сможет уравновесить любую другую пару гирь. Пусть Белка выбрала гири массами m и n , причём $n > m$. Тогда, если $n - m > 2$, то их уравновесят гири с массами $m + 1$ и $n - 1$ (такие гири обязательно найдутся в оставшемся наборе). Если же $n - m = 1$ или $n - m = 2$, то их уравновесят гири с массами $m - 1$ и $n + 1$. Такие гири найдутся в оставшемся наборе, если $m \neq 1$ и $n \neq 2019$, а именно эти случаи и указаны в ответе.